МАТЕМАТИКА 2 (для Р1 и Р4)

Памятка по ключевым вопросам теории для подготовки к экзамену

1. Определение определителей 2-го, 3-го порядков.

Пусть задана матрица второго порядка $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Число, которое определяется по правилу: $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$, называется ***определителем второго порядка*** и обозначается

$$\Delta=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}.$$

Пусть задана матрица третьего порядка $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. ***Определителем третьего порядка*** называется число, которое определяется по правилу:

$$\Delta=|A|=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Геометрический смысл определителя третьего порядка: определитель равен ориентированному объему параллелепипеда с ребрами, образованными векторами= строками определителя.

Определитель 3-го порядка можно вычислять по формуле

$$\Delta=|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$
$$-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}.$$

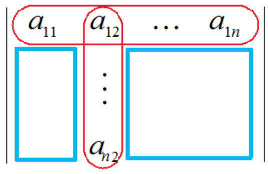
Определителем n***-го порядка*** называется сумма произведений элементов первой строки матрицы на определители M_{1j} $(n-1)$-го порядка, полученные вычеркиванием строки и столбца с указанным элементом, знаки которых чередуются начиная с плюса:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{vmatrix}=$$

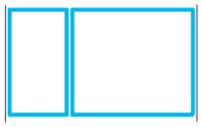
$$=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+\ldots+(-1)^{n+1}a_{1n}M_{1n}.$$

Принцип построения определителей M_{1j} поясняет рисунок (на примере M_{12}):

исходный определитель:



тогда $M_{12}=$



2. Алгебраическое дополнение к элементу квадратной матрицы

Минором элемента a_{ij} квадратной матрицы порядка n называется определитель матрицы $(n-1)$-го порядка, полученной вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент a_{ij}.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} квадратной матрицы порядка n называется его минор, взятый со знаком «плюс», если сумма $i+j$ — чётное число, и со знаком «минус», если сумма нечётна.

3. Элементарные преобразования матрицы.

Под *элементарными* преобразованиями матрицы понимают следующие действия:

1. перемена местами двух строк (или столбцов) матрицы;
2. умножение (деление) строки (или столбца) матрицы на число, отличное от нуля;
3. прибавление к элементам одной строки (или столбца) соответствующих элементов другой строки (или столбца), умноженных на одно и тоже число.

4. Определение ранга матрицы.

Рангом матрицы будем называть количество ненулевых строк матрицы после приведения ее к трапециевидной форме с помощью элементарных преобразований.

5. Определение обратной матрицы.

Пусть A – квадратная матрица n – ого порядка. ***Обратной*** для матрицы A называется матрица, обозначаемая A^{-1}, для которой выполняется условие $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$.

Обратная матрица A^{-1} существует тогда и только тогда, когда определитель матрицы A не равен нулю: $|A|\neq 0$.

6. Теорема Крамера.

Если определитель системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными отличен от нуля $(\Delta\neq 0)$, то система имеет единственное решение, которое может быть найдено по ***формулам Крамера***

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\ldots,x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ – определитель системы, а вспомогательные определители Δ_j получаются из Δ заменой столбца из коэффициентов при неизвестной x_j столбцом свободных членов ($j = 1, 2, \dots, n$).

7. Формула для вычисления длины вектора в прямоугольной системе координат.

Пусть $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, тогда длина вектора вычисляется по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

8. Определение и свойства скалярного и векторного произведений, формулы для их вычисления в прямоугольной системе координат.

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное

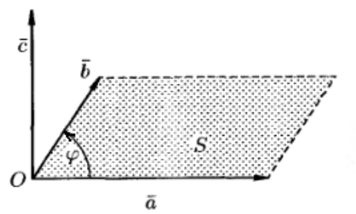
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\left(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}\right).$$

Если $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z .$$

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий условиям:

1. $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;
2. векторы $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ образуют правую тройку;
3. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\left(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}\right).$

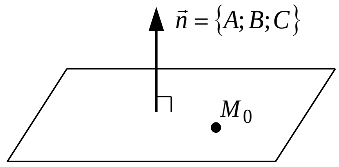


Если $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}.$$

9. Общее уравнение плоскости в пространстве.



$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$,

где $\vec{n} = \{A; B; C\}$ – *вектор нормали* к плоскости, т.е. любой вектор, перпендикулярный плоскости;

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, имеет вид

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}.$$

10. Канонические уравнения прямой в пространстве.

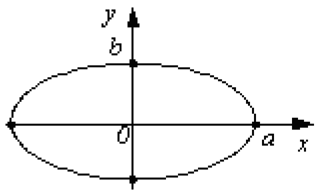
$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}},$$

где $\vec{s}\{m; n; p\}$ – *направляющий вектор* прямой, т.е. любой вектор, параллельный прямой;

$M_0(x_0; y_0; z_0)$ – точка, через которую проходит прямая.

11. Каноническое уравнение и рисунок эллипса.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

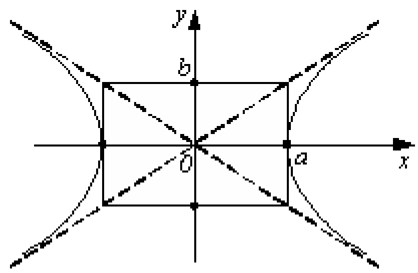


12. Каноническое уравнение и рисунок гиперболы.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Асимптоты:

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$



13. Каноническое уравнение и рисунок параболы.

$$y^2 = 2px$$